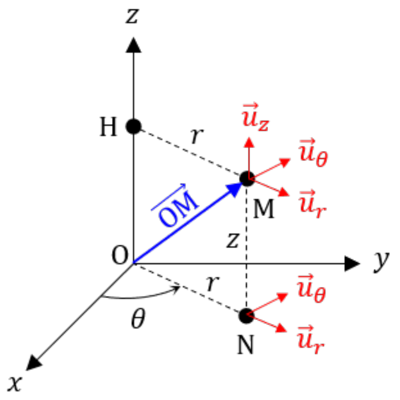
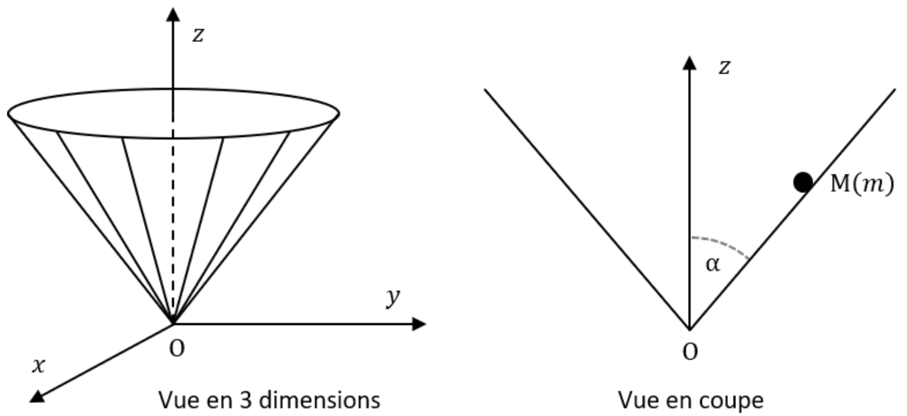
Devoir de cours n°4

1) À l'aide d'un schéma, définir le système de coordonnées cylindriques.

Correction

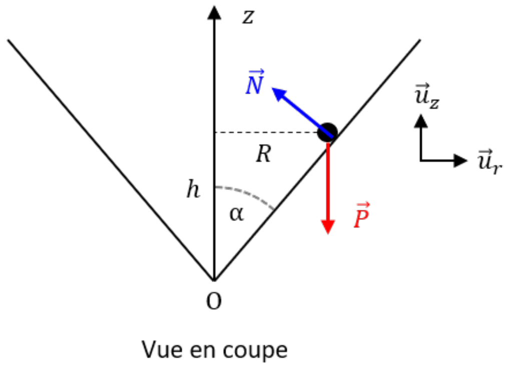


On considère un cône d'angle au sommet α (angle entre l'axe du cône et sa surface). Un point matériel M de masse m se situe sur la surface intérieure du cône. Il est soumis uniquement à son poids $\overrightarrow{P}$ et à la réaction normale du support $\overrightarrow{N}$ (de norme N).



2) Dessiner ces forces sur le schéma de droite, puis exprimer ces deux forces dans la base cylindrique.

Correction



Pour le poids, c'est immédiat :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}}$$

Pour la réaction normale, il faut projeter :

$$\boxed{\overrightarrow{N} = N\Big(-\cos(\alpha)\,\overrightarrow{u_r} + \sin(\alpha)\,\overrightarrow{u_z}\Big)}$$

On suppose que M suit une trajectoire circulaire uniforme, de rayon R à une altitude constante $z = h$.

3) Exprimer R en fonction de h et α.

Correction

On a directement :

$$\boxed{R = h\,\tan(\alpha)}$$

4) Dans cette situation, exprimer les vecteurs vitesse $\overrightarrow{v}$ et accélération $\overrightarrow{a}$.

Correction

Mouvement circulaire donc R constant.

$$\overrightarrow{\text{OM}} = R\overrightarrow{u_r} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

Mouvement uniforme donc $v = cte$, donc $\dot{\theta} = cte$.

$$\boxed{\overrightarrow{a} = -R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} = -\frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_r}}$$

5) Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour en déduire l'expression de v, en fonction de R, g et α.

Correction

Le PFD donne :

$$\begin{cases} -\dfrac{mv^2}{R} = -N\,\cos(\alpha) \\ 0 = N\,\sin(\alpha) - mg \end{cases}$$

On en déduit :

$$N = \frac{mg}{\sin(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \frac{mv^2}{R} = \frac{mg}{\tan(\alpha)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{\frac{Rg}{\tan(\alpha)}}}$$